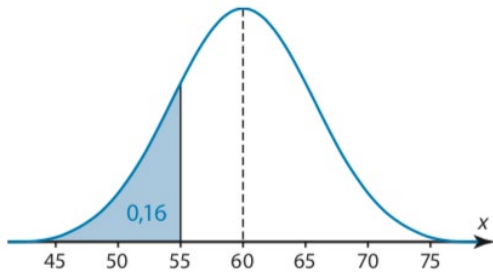


B1



a) $P(X \leq a) = 0,5$, kun $a = 60$

b) $P(X \geq a) = 0,84$, kun $P(x < a) = 0,16$

$P(x < a) = 0,16$, kun $a = 55$

c) $P(X \geq a) = 0,16$

Etsitään siis kohtaa, jonka oikealla puolella oleva pinta-ala on 0,16.

Koska kohdan 55 vasemmalla puolella oleva pinta-ala on 0,16 ja kohta 55 on viisi yksikköä odotusarvon alapuolella, niin kohdan $60 + 5 = 65$ oikealle puolella oleva pinta-ala on 0,16.

Siis $P(X \geq a) = 0,16$, kun $a = 65$.

Vastaus

a) $a = 60$ b) $a = 55$ c) $a = 65$

B2

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 6$. Yksittäisessä toistossa virheellisen kupin todennäköisyys $p = 0,02$.

a) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{täsmälleen 2 virheellistä}) \\ &= \binom{6}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^4 \\ &\approx 0,0055 \end{aligned}$$

b) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{täsmälleen 0 virheellistä}) \\ &= \binom{6}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^6 \\ &\approx 0,89 \end{aligned}$$

c) Tapahtuman ”ainakin yksi virheellinen” vastatapahtuma on ”ei yhtään virheellistä”. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin yksi virheellinen}) \\ &= 1 - P(\text{ei yhtään virheellistä}) \\ &= 1 - 0,89 \\ &= 0,11 \end{aligned}$$

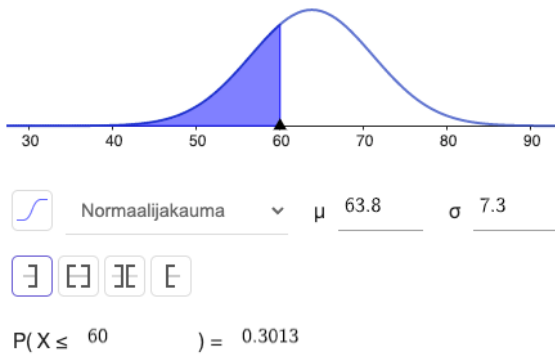
Vastaus

a) 0,0055 b) 0,89 c) 0,11

B3

Merkitään satunnaisesti valitun auton nopeutta kirjaimella X . Autojen nopeuksien odotusarvo $\mu = 63,8$ (km/h) ja keskihajonta $\sigma = 7,3$ (km/h).

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun autoilijan nopeus on alle 60 km/h.

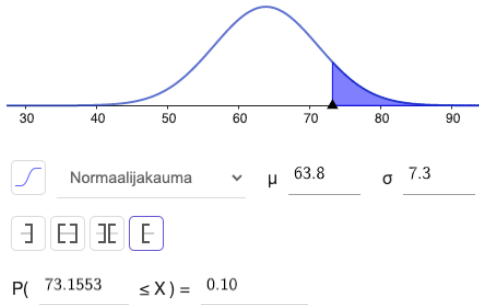


$$P(X \leq 60) \approx 0,3013$$

30 % autoilijoista noudatti nopeusrajoitusta.

- b) On määritettävä raja, jonka yläpuolella on 10 % autoilijoista, eli sellainen nopeus a , että $P(X > a) = 0,10$.

Määritetään raja GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$$P(X > a) = 0,10, \text{ kun } a \approx 73$$

Nopeimmat 10 % autoilijoista ajoi vähintään nopeudella 73 km/h.

Vastaus

- a) 30 %
b) vähintään 73 km/h

B4

Rahaa heitetään viisi kertaa. Jotta kruuna voisi sattua toisen kerran viimeisessä heitossa, neljän ensimmäisen heiton joukossa on oltava 1 kruuna ja 3 klaavaa sekä viimeisen heiton on oltava kruuna.

Lasketaan ensin, millä todennäköisyydellä neljässä heitossa saadaan täsmälleen yksi kruuna. Kyseessä on toistokoe, jossa $n = 4$ ja $p = 0,5$.

$P(\text{täsmälleen 1 kruuna neljässä heitossa})$

$$\begin{aligned} &= \binom{4}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^3 \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi, millä todennäköisyydellä saadaan neljässä ekassa heitossa 1 kruuna ja viidennessä heitossa kruuna.

$$\begin{aligned} &P(4 \text{ heitossa 1 kruuna JA viidennellä kruuna}) \\ &= P(4 \text{ heitossa 1 kruuna}) \cdot P(\text{viidennellä kruuna}) \\ &= 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \end{aligned}$$

Vastaus

0,125

B5

- a) 95 %:n luottamustason kriittinen arvo on 1,96. Lasketaan prosenttiosuuden virhemarginaali 95 %:n luottamustasolla.

$$1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,50 \cdot (1 - 0,50)}{5677}} \quad \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$
$$= 0,013 = 1,3 \%$$

Kannattajien prosenttiosuus on 95 %:n varmuudella vähintään

$$50 \% - 1,3 \% = 48,7 \%$$

ja enintään

$$50 \% + 1,3 \% = 51,3 \%$$

Kannattajien prosenttiosuuden luottamusväli 95 %:n luottamustasolla on [48,7 %; 51,3 %].

b) Kysymykseen vastasi 5677 lukiolaista.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla prosenttiosuuden luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Suhteen Z-estimaatti 

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 2838.5

N 5677

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	2838.5
N	5677
S	0.0066
Alaraja	0.487
Yläraja	0.513
Väli	0.5 ± 0.013

Kannattajien prosenttiosuuden luottamusväli 95 %:n luottamustasolla on [48,7 %; 51,3 %].

c) Työssä työn mielekkyyden kokee tärkeimmäksi 95 %:n varmuudella 48,7 %–51,3 % lukiolaisista.

Vastaus

a) [48,7 %; 51,3 %]

b) [48,7 %; 51,3 %]

B6

- a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 20$. Yksittäisessä toistossa onnistumisen todennäköisyys on p .

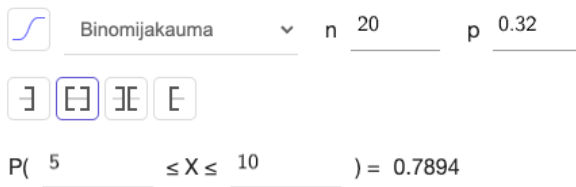
Toistokokeen odotusarvo on $E(X) = np = 20p$.

Tiedetään, että odotusarvo on 6,4. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$\begin{aligned} 20p &= 6,4 & | :20 \\ p &= 0,32 \end{aligned}$$

- b) Jukan saamien kymppien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa $\text{Bin}(20; 0,32)$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $5 \leq X \leq 10$.



Binomijakauma n 20 p 0.32

$P(5 \leq X \leq 10) = 0.7894$

$$P(5 \leq X \leq 10) \approx 0,79$$

Jukka heittää vähintään 5 mutta enintään 10 kymppiä todennäköisyydellä 0,79.

Vastaus

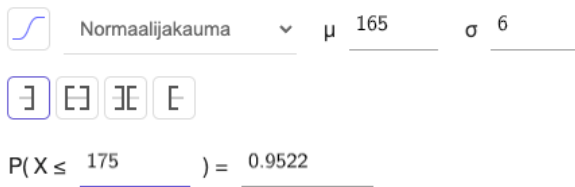
a) $p = 0,32$

b) 0,79

B7

Merkitään satunnaisesti valitun 18-vuotiaan tytön pituutta senttimetreinä kirjaimella X . Pituuden keskiarvo on 165 cm ja keskihajonta 6 cm. Siis $\mu = 165$ ja $\sigma = 6$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun tytön pituus on korkeintaan 175 cm.



Normaalijakauma μ 165 σ 6

$P(X \leq 175) = 0.9522$

Umpimähkään valittu 18-vuotias tyttö on korkeintaan 175 cm pitkä todennäköisyydellä 0,952.

Lasketaan todennäköisyys, että kaikki kolme tyttöä ovat alle 175 cm pitkiä.

$$\begin{aligned} &P(\text{kaikki kolme alle 175 cm}) \\ &= P(X < 175) \cdot P(X < 175) \cdot P(X < 175) \\ &= 0,9522 \cdot 0,9522 \cdot 0,9522 \\ &= 0,9522^3 \approx 0,863 \end{aligned}$$

Kolmen tytön ryhmässä kaikki ovat alle 175 cm pitkiä todennäköisyydellä 0,863.

Tapahtuman "ainakin yksi on yli 175 cm" vastatapahtuma on "kaikki ovat korkeintaan 175 cm". Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{ainakin yksi yli } 175 \text{ cm})$

$= 1 - P(\text{kaikki alle } 175 \text{ cm}) \quad P(\text{kaikki alle } 175 \text{ cm}) \approx 0,863$

$= 1 - 0,863$

$= 0,137$

Kolmen tytön ryhmässä ainakin yksi on yli 175 cm pitkä todennäköisyydellä 0,137.

Vastaus

korkeintaan 175 cm pitkä: 0,952;

kaikki alle 175 cm pitkiä: 0,863;

ainakin yksi yli 175 cm pitkä: 0,137

B8

- a) Otoksen koko on 40 pakkausta. Näiden keskiarvo on 695 ml ja keskihajonta 22 ml.

Tapa 1.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla suihkusaippuan määrän luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Jakauma	Tilastot
Keskiarvon Z-estimaatti ▼	
Luottamustaso	0.95
Otos	
Keskiarvo	695
σ	22
N	40

Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	695
σ	22
S	3.4785
N	40
Alaraja	688.1823
Yläraja	701.8177
Väli	695 ± 6.8177

Luottamusväli on [688 ml; 702 ml].

Tapa 2.

95 %:n luottamustasolla kriittinen arvo on 1,96.

Lasketaan virhemarginaali.

$$1,96 \cdot \frac{22}{\sqrt{40}} = 6,8 \text{ (ml)} \quad \text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Kaikkien pakkausten suihkusaippuan määrän keskiarvo on 95 %:n varmuudella vähintään

$$695 \text{ ml} - 6,8 \text{ ml} = 688,2 \text{ ml} \approx 688 \text{ ml}$$

ja enintään

$$695 \text{ ml} + 6,8 \text{ ml} = 701,8 \text{ ml} \approx 702 \text{ ml}$$

Luottamusväli on [688 ml; 702 ml].

- b)** Koska tavoitemäärä 700 ml on luottamusvälin [688 ml; 702 ml] sisällä, annosteluautomaatti on säädetty oikein.

Vastaus

a) [688 ml; 702 ml]

b) on säädetty oikein

B9

- a) Olkoon satunnaismuuttuja X : "satunnaisesti valitun ihmisen älykkyysosamäärä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 100$ ja keskihajonta $\sigma = 15$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun vieraan älykkyysosamäärä on vähintään 105.

 Normaalijakauma μ 100 σ 15



$P(\text{ 105 } \leq X) = \text{ 0.3694 }$

Satunnaisesti valitun vieraan älykkyysosamäärä on vähintään 105 todennäköisyydellä 0,37.

- b) Juhliin osallistuvat 45 vierasta muodostavat otoksen.

Lasketaan älykkyysosamäärän keskiarvon keskivirhe.

$$s_{\bar{x}} = \frac{15}{\sqrt{45}} \approx 2,24 \qquad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Vastaavien otosten älykkyysosamäärien otoskeskiarvot noudattavat normaalijakaumaa, jonka

odotusarvo $\mu = 100$ ja perusjoukon odotusarvo
keskihajonta $\sigma = 2,23$. keskiarvon keskivirhe

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että otoskeskiarvo on vähintään 105.

 Normaalijakauma μ 100 σ 2.23

P(105 $\leq X$) = 0.01248

Juhliin osallistuneiden älykkyyssosamäärien keskiarvo on vähintään 105 todennäköisyydellä 0,013.

Vastaus

a) 0,37

b) 0,013

B10

1. Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Lasketaan jokaisen heittokerran silmälukujen summat.

Määritetään sen jälkeen kysytyt tunnusluvut.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Heitto	Noppa 1	Noppa 2	Noppa 3	Noppa 4	Noppa 5	Summa				
2	1	3	6	4	3	5	21	=SUMMA(B2:F2)	Minimi	10	=MIN(G2:G101)
3	2	4	1	3	1	1	10		Maksimi	26	=MAKS(G2:G101)
4	3	4	3	6	4	1	18		Mediaani	17	=MAKS(G2:G101)
5	4	6	5	6	5	4	26		Keskiarvo	17,1	=KESKIARVO(G2:G101)
6	5	6	3	1	5	5	20		Keskihajonta	3,6	=KESKIHAJONTA(G2:G101)
7	6	2	1	4	6	2	15				
8	7	3	3	4	1	3	14				

minimi: 10

maksimi: 26

mediaani: 17

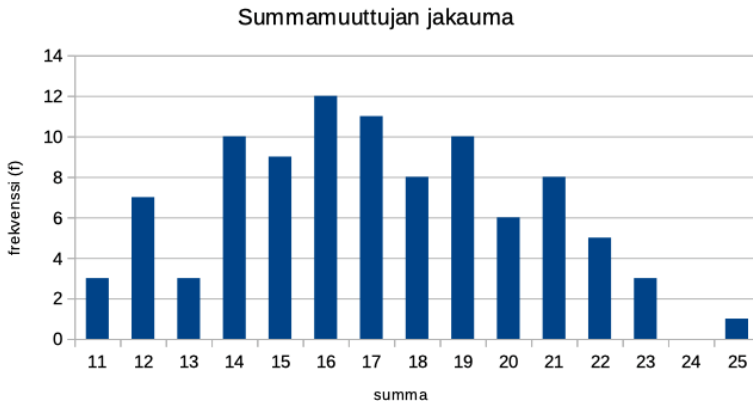
keskiarvo: 17,1

keskihajonta: 3,6

2. Laaditaan frekvenssitaulukko. Kirjoitetaan sarakkeeseen L summamuuttujan mahdolliset arvot 10, 11, 12, ..., 26. Lasketaan sarakkeeseen M kunkin arvon frekvenssi.

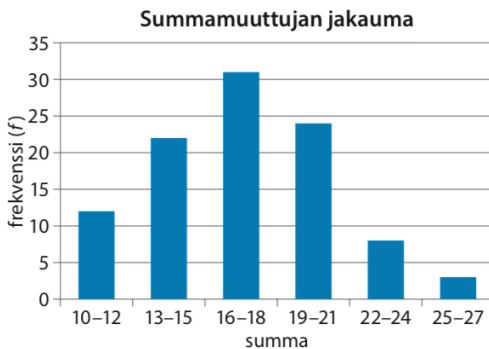
	L	M	N	O
1	Summa	f		
2	11	3	=LASKE.JOS(\$G\$2:\$G\$101;L2)	
3	12	7		
4	13	3		
5	14	10		
6	15	9		
7	16	12		
8	17	11		
9	18	8		
10	19	10		
11	20	6		
12	21	8		
13	22	5		
14	23	3		
15	24	0		
16	25	1		

Valitaan solut L1:M16 ja piirretään pylväskaavio.



HUOMAA:

Voit myös luokitella aineiston ensin tasalevyisiin luokkiin ja piirtää sen jälkeen pylväskuvion.



3. Kuvaajan perusteella luvut painottuvat keskelle ja ääripäissä on vähemmän lukuja. Siten jakauma muistuttaa enemmän normaalijakaumaa kuin tasaista jakaumaa.